

### Clase 3

Recordamos que, dado un espacio normado  $X$ , su dual  $X'$  fue definido como

$$X' = \{ f: X \rightarrow \mathbb{K} \text{ funcionales lineales continuos} \}.$$

Es siempre un espacio de Banach, aunque  $X$  fuese incompleto (se sigue de lo que ya vimos).

Ejercicio Empleando una de las versiones del Tma HB, demostrar que  $\dim X = \infty \Rightarrow \dim X' = \infty$ .

Def: El bidual  $X''$  se define como el dual del dual:

$$X'' \stackrel{\text{def}}{=} (X')'.$$

A partir de ahora, vamos a suponer

que  $X$  es un espacio de Banach.

Def La aplicación canónica de  $X$  al dual  $X'$  se define por

$$x \in X \mapsto Jx \in X',$$

$$(Jx)(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \quad x \in X, f \in X'.$$

Es lineal. El Corolario 3 dice que es una isometría:

$$\forall x \in X \quad \|Jx\|_{X'} = \|x\|.$$

Por consiguiente,  $J(X) \subset X'$  es completo en métrica de  $X'$  (toda sucesión de Cauchy en  $JX$  converge: se sigue del mismo hecho para  $X$ ).

Conclusión:  $J(X)$  es un subespacio

cerrado del dual  $X'$ .

Def Sea  $X$  un espacio de Banach. Se dice que es reflexivo si  $J(X) = X'$ .

Corol 4 del T<sup>ma</sup> HB  $X$  un espacio normado,  $Y \neq X$  su subespacio cerrado  $\Rightarrow$

$\exists f \in X' : f \neq 0$ , pero  $f|_Y = 0$ .

Demo Cuando habláramos del espacio cociente, hemos visto que  $Y+Z$  es un subespacio cerrado de  $X$ , si  $Z \subset X$  es finito dimensional. Escogemos cualquier vector  $z \in X$  tal que  $z \notin Y$ , y consideramos

$$Z = \{K \cdot z = \langle z \rangle\},$$

es un subespacio de  $X$  de dimensión 1.

Primero definimos el funcional lineal  $f$  sobre  $Y+Z$ , poniendo

$$f(y) = 0 \quad \forall y \in Y,$$

$$f(z) = 1.$$

¿Por qué es continuo? Si denotamos por  $Q$  la proyección canónica

$$Q: Y+Z \rightarrow Y+Z/Y$$

entonces vemos que  $f = \varphi \circ Q$ , donde  $\varphi$  está definido por

$$\varphi(z+Y) = 1.$$

Como la dimensión de  $Y+Z/Y$  es uno, esta fórmula define correctamente un funcional

$$\varphi: Y+Z/Y \rightarrow \mathbb{K};$$

es, además, continuo. Con lo cual

$$f = \varphi \circ Q$$

es la composición (el producto) de dos operadores lineales continuos, luego es continuo.

Está claro que  $f|_Y = 0$ , pero  $f \neq 0$  en el espacio cerrado  $Y+Z$ .

Ahora solo queda aplicar el  $T^{\text{ma}}$  HB y extender  $f$  de  $Y+Z$  a  $X$ , conservando su norma.  $\square$

Capítulo 4. El principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus y sus corolarios. Convergencia SOT de operadores lineales.

§1 Teorema de Banach-Steinhaus. Sea

$X$  un espacio de Banach,  $Y$  un espacio normado, y  $F$  una familia de operadores acotados:

$$F \subset L(X, Y).$$

Entonces las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1)  $\mathcal{F}$  está puntualmente acotada:

para todo vector  $x \in X$ ,  $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$ ;

(2)  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada:

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty. \quad (A.1)$$

Comentarios 1) Es obvio que  $(2) \Rightarrow (1)$ :

Si  $\|T\| \leq C < \infty$  para todo operador  $T \in \mathcal{F}$ , entonces

$$\forall x \in X, \quad \forall T \in \mathcal{F} \quad \|Tx\| \leq C\|x\|,$$

con lo cual  $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| \leq C\|x\| < \infty$ .

El verdadero contenido del  $T^m B S$  es que  $(1) \Rightarrow (2)$ .

2) Daremos 2 pruebas de este

teorema. La primera prueba no utiliza el T<sup>ma</sup> de Baire. La segunda prueba sí utiliza este teorema. Como un "premio", obtendremos adicionalmente que las afirmaciones (1) y (2) son equivalentes a

(3) Existe un subconjunto  $A \subset X$  de segunda categoría tal que

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\| < \infty \quad \forall x \in A.$$

Empezamos con el siguiente

Lema Sea  $T \in L(X, Y)$ . Entonces

$\forall x \in X, \forall r > 0$

$$\sup_{y \in B_r(x)} \|Ty\| \geq \|T\| r.$$

El lema se sigue directamente de la definición de  $\|T\|$  en el caso

cuando  $x=0$ . (En este caso, tenemos la igualdad). Lo importante es que es cierto también para las bolas, no centradas en el origen.

Demo. Para cualquier vector  $\xi \in X$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \max \{ \|T(x+\xi)\|, \|T(x-\xi)\| \} &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} (\|T(x+\xi)\| + \|T(x-\xi)\|) \quad (1.2) \\ &\geq \frac{1}{2} \|T(\underbrace{(x+\xi) - (x-\xi)}_{2\xi})\| = \|T\xi\|. \end{aligned}$$

Si escogemos  $\xi \in B_r(0)$ , entonces  $x+\xi, x-\xi \in B_r(x)$ . Nos fijamos en las dos partes extremas de la cadena de desigualdades (1.2) y pasamos al

$$\sup_{\xi \in B_r(0)} \{ \dots \}$$



Obtenemos:

$$\sup_{y \in B_r(x)} \|Ty\| = \sup_{\xi \in B_r(0)} \|T(x+\xi)\| =$$

$$= \sup_{\xi \in B_r(0)} \max \{ \|T(x+\xi)\|, \|T(x-\xi)\| \}$$

$$\geq \sup_{\xi \in B_r(0)} \|T\xi\| = r \|T\|. \quad \square$$

Prueba del T<sup>ma</sup> Banach - Steinhaus (1 $\Rightarrow$ 2)

Supongamos que  $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| = \infty$ . Escogemos

$T_n \in \mathcal{F}$ , con  $\|T_n\| \geq C_n \rightarrow \infty$ . Elegiremos las constantes  $C_n$  más tarde.

Ponemos  $x_0 = 0$ , y definiremos vectores  $x_n$  de forma inductiva:

$$\begin{cases} \|x_n - x_{n-1}\| \leq 3^{-n} \\ \|T_n x_n\| \geq \frac{2}{3} \cdot 3^{-n} \|T_n\| \end{cases}$$

Esto es posible, según el Lema anterior.

La sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy.  
En efecto:

$$m > n \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \underset{\uparrow}{3^{-n+1}} + \dots + 3^{-m} \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty$$

(por la desigualdad triangular)

Hemos supuesto que  $X$  es de Banach.  
Por tanto,  $\exists x_* \in X : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_*$ .

Podemos decir algo más. Pasando al límite en la estimación anterior cuando  $m \rightarrow \infty$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_*\| &\leq 3^{-n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = \\ &= 3^{-n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|T_n x_*\| &\geq \|T_n x_n\| - \|T_n\| \|x_n - x_*\| \\ &\geq \left( \frac{2}{3} 3^{-n} - \frac{1}{2} 3^{-n} \right) \|T_n\| = \frac{1}{6} 3^{-n} \|T_n\|.\end{aligned}$$

Ya está claro cómo tenemos que elegir  $C_n$ . Poniendo  $C_n = 4^n$ , vemos:

$$\|T_n x_*\| \geq \frac{1}{6} \left( \frac{4}{3} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Por tanto, la sucesión de operadores  $T_n \in \mathcal{F}$  no está acotada sobre el vector  $x_* \in X$ , que hemos construido. Es una contradicción. El teorema queda demostrado.  $\square$

Prueba II del T<sup>ma</sup> Banach - Steinhaus

En esta prueba, veremos que  $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ , donde la afirmación (3) es la que

está en el recuadro en la pág. 33.

Por el T<sup>ma</sup> de Baire,  $\bar{X}$  es un conjunto de segunda categoría en sí mismo. Luego  $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$ .

Queda por ver que  $(3) \Rightarrow (2)$ .

Definimos conjuntos

$$E_n = \{x \in X : \|Tx\| \leq n, \forall T \in \mathcal{F}\}.$$

Son cerrados (; por que?).

Además,  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , y

$$A \subset \bigcup_n E_n.$$

Luego  $\exists n : E_n$  no es diseminado, es decir, tiene ~~pb~~ interior no vacío. Es decir:

$$\exists n \exists r, x_0 : B_r(x_0) \subset E_n.$$

Entonces

(Lema)



$$T \in \mathcal{F} \Rightarrow \|T\| \cdot r \leq \sup_{y \in B_r(x_0)} \|Ty\| \leq n.$$

Por lo tanto,

$$\|T\| \leq \frac{n}{2} \quad \forall T \in \mathcal{F}.$$

Hemos demostrado que la familia de operadores  $\mathcal{F}$  es uniformemente acotada, es decir, se cumple (2).  $\square$

Corol 1 Si las normas  $\|T\|, T \in \mathcal{F}$ , no están acotadas, entonces

$$\{x : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}$$

es de 1ª categoría en  $X$ .

Un caso importante es la misma afirmación para una sucesión de operadores.

Corol 2 (el principio de fijación de singularidades) Supongamos (como antes) que  $X$  es de Banach e  $Y$  es

normada. Sean  $T_n \in L(X, Y)$  tales que  
 $\sup \|T_n\| = \infty$ , Entonces  $\exists x \in X$ :

$$\sup \|T_n x\| = \infty.$$

## §2 La convergencia SOT de operadores (la convergencia fuerte)

Def Sean  $T_n \in L(X, Y)$ . Decimos  
que  $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T$  fuertemente si

$$T_n x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T x, \quad \forall x \in X$$

[es decir,  $\|T_n x - T x\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in X$ .]

Escribimos en este caso:

$$T = \text{SOT-} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$$

(SOT = "Strong Operator Topology").

Es una convergencia en un

cierto espacio topológico. Más tarde (quizás) hablaremos de esta topología.

Lema Si  $T_n \xrightarrow{SOT} T$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  
entonces  $\sup_n \|T_n\| < \infty$ .

Efectivamente:  $T_n \xrightarrow{SOT} T$  implica  
que  $\{T_n\}$  están puntualmente acotados.  
La afirmación se sigue del T<sup>ma</sup> Banach  
- Steinhilber,  $\square$

El siguiente teorema se usa  
mucho en todo tipo de aplicaciones.

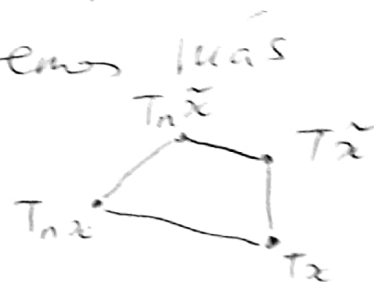
Teor  $T_n \rightarrow T$  fuertemente  
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \exists C < \infty : \sup_n \|T_n\| \leq C \\ 2) \exists \text{ un subconjunto denso } \tilde{X} \subset X : \\ T_n x \rightarrow T x \quad \forall x \in \tilde{X}. \end{cases}$

Demostación La parte más importante  
del Teorema es, sin duda, la

afirmación que  $T_n \xrightarrow{\text{SOT}} T \Rightarrow \sup_n \|T_n\| \leq C$ ,  
para alguna constante  $C < \infty$ . Es una  
consecuencia del  $T^m$  Banach-Steinhaus.  
Nosotros ya lo vimos en el Lema anterior.  
Esto nos da la implicación directa  
" $\Rightarrow$ ".

La implicación inversa se obtiene  
con un argumento simple, que se llama  
a veces " $\frac{\varepsilon}{3}$  argument".

Escogemos un  $x \in X$  arbitrario.  
Sea  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  un vector suficientemente  
cercano a  $x$  (lo precisaremos más  
tarde). Escribamos:



$$\|T_n x - T x\| \leq \|T_n x - T_n \tilde{x}\| + \|T_n \tilde{x} - T \tilde{x}\| + \|T \tilde{x} - T x\|. \quad (2.1)$$

Escogemos también cualquier  $\varepsilon > 0$ .



Tenemos que demostrar que  $\|T_n x - T x\| < \varepsilon$  si  $n \geq N$  (donde  $N$  depende de  $\varepsilon$  y también puede depender de  $x$ :  $N = N(\varepsilon, x)$ ). Para ello, basta ver que  $\exists N$  tal que cada sumando en la parte derecha de (2.1) es  $< \frac{\varepsilon}{3}$  si  $n > N$ . Escribamos:

$$\|T_n x - T_n \tilde{x}\| \leq C \|x - \tilde{x}\|; \quad (2.2)$$

$$\|T \tilde{x} - T x\| \leq \|T\| \|x - \tilde{x}\|. \quad (2.3)$$

Razonamos de la siguiente forma. Elegimos  $\tilde{x}$  de tal forma que

$$\max(C, \|T\|) \cdot \|x - \tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fijado este  $\tilde{x} \in X$ , buscamos un  $N$  tal que  $\|T_n \tilde{x} - T \tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{3}$  si  $n > N$ . Entonces (2.1), (2.2) y (2.3) nos dan

$$\begin{aligned} \|T_n x - T x\| &\leq \|T_n x - T_n \tilde{x}\| + \|T_n \tilde{x} - T \tilde{x}\| \\ &\quad + \|T \tilde{x} - T x\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Observación En este teorema, hemos

supuesto que  $T: X \rightarrow Y$  es un operador lineal acotado. Se puede demostrar

que, dados unos operadores

$T_n \in L(X, Y)$  con  $\sup \|T_n\| \leq C$  y

un operador  $T: X \rightarrow Y$  lineal arbitrario

tal que  $T_n \xrightarrow{\text{SOT}} T$  (es decir,

$T_n x \rightarrow T x \quad \forall x \in X$ ),  $T$  va a ser

también acotado, con  $\|T\| \leq C$ .

Ejemplo 1 de la convergencia SOT:

Sea  $X = \ell^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Definimos las proyecciones

$$P_n: \ell^p \rightarrow \ell^p,$$

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Si  $1 \leq p < \infty$ , entonces  $P_n \rightarrow I$  fuertemente [¡Comprobarlo!].

Si  $p = \infty$ , esto es falso:

$$\|P_n x - Px\| \not\rightarrow 0, \text{ si, por ejemplo,}$$

$$x = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \in \ell^\infty,$$

Observad que para todo  $n$  (y para todo  $p$ ),

$$\|P_n - I\| = 1.$$

Así que la convergencia SOT es más débil que la convergencia en norma.

Podemos generalizar este ejemplo a las bases de Schauder

cualesquiera. Necesitamos el siguiente

Teor Sea  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  una base de Schauder en  $X$ .

Dado cualquier

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X$$

(los coeficientes  $x_k$  se determinan de forma única), definimos

$$f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_k \in \mathbb{K}.$$

Entonces  $f_k: X \rightarrow \mathbb{K}$  son funcionales lineales continuos.

El que  $f_k$  son lineales es obvio, además, están definidos sobre todo  $\bar{X}$ . El que sean continuos requiere un argumento sutil. Ahora dejamos este teorema sin demostración. Posiblemente, veremos la demostración

más tarde (si nos da tiempo).

Obs: en esta situación,

$$f_k(e_n) = \delta_{kn}.$$

El sistema de funcionales  $f_k \in X'$  se dice que es biortogonal a la familia  $\{e_n\}$ .

Notación Dados unos vectores  $g_n \in X$ , denotamos por  $\text{Lin}(\{g_n\})$  el espacio generado por  $\{g_n\}$  en el sentido algebraico. Denotamos por  $\overline{\text{Lin}(\{g_n\})}$  (ó  $\text{span}(\{g_n\})$ ) la clausura de este espacio. Es el mínimo subespacio cerrado de  $X$  que contiene a todos los vectores  $g_n$ . Usaremos la misma notación:

$$\text{Lin}(G), \overline{\text{Lin}(G)} = \text{span}(G) \text{ para}$$

los correspondientes espacios, generados por un subconjunto cualquiera  $G \subset X$ .

El ejemplo 2 es un análogo del ejemplo 1 para una base de Schauder arbitraria en un espacio de Banach  $X$ .  
Lo enunciamos en forma del siguiente

Teor Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $\{e_n\} \subset X$  una familia de vectores en  $X$ . Entonces  $\{e_n\}$  es una base de Schauder de  $X \Leftrightarrow$

$$1) \exists f_k \in X' : f_k(e_n) = \delta_{kn};$$

$$2) \overline{\text{Lin}}(\{e_n\}) = X;$$

3) Si ponemos

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k,$$

entonces  $\exists C : \sup \|P_n\| < \infty$ .

Obs: Alternativamente,  $P_n$  se definen por

$$P_n \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \sum_{k=1}^n x_k e_k,$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X.$$

Os dejo la demostración de este teorema. La idea es que para toda base de Schauder  $\{e_n\}$ ,

$$P_n \xrightarrow{\text{SOT}} I.$$

Claase 4

Propiedades de la convergencia fuerte de operadores

1) Sean  $T_n, S_n: X \rightarrow Y$  operadores lineales continuos,  $T, S \in L(X, Y)$ ,

$$T_n \xrightarrow{\text{SOT}} T, \quad S_n \xrightarrow{\text{SOT}} S. \quad \text{Sean } \lambda, \mu \in \mathbb{K},$$

Entonces

$$\lambda T_n + \mu S_n \xrightarrow{\text{SOT}} \lambda T + \mu S.$$